SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Angelo Favini

EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON RITARDO

25 febbraio 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto.

Si studia l'equazione differenziale $d(Mu(t))/dt = -Lu(t) + L_1 u(t-1)$, $t \geq 0$, $u(t) = \phi(t)$, $-1 \leq t \leq 0$, dove ϕ é una funzione continua da $[-1, 0]$ a X, M, L, L_1 sono operatori lineari chiusi dallo spazio di Banach complesso X in sé, e L é invertibile. Sebbene giá nel caso finito dimensionale in generale puó non esistere una soluzione continua su $[-1, \infty[$ oppure puó essere definita solo su un intervallo finito, si indica una classe di operatori per i quali valgono risultati di esistenza analoghi a quelli per equazioni regolari, dove M é l'operatore identitá.

Abstract.

The differential equation $d(Mu(t))/dt = -Lu(t) + L_1 u(t-1)$, $t \geq 0$, $u(t) = \phi(t)$, $-1 \leq t \leq 0$, for a given strongly continuous X-valued function ϕ on $[-1, 0]$ is studied, when M, L, L_1 are closed linear operators from the complex Banach space X into itself, and L is invertible. Though already in the finite dimensional case in general existence of continuous solutions on $[-1, \infty[$ may fail or it is possible to have continuous solutions only on a finite interval, we indicate classes of operators for which existence results analogous to the ones for regular equations $M = I$ hold.

1. Introduzione

In varie applicazioni relative a sistemi fisici entrano equazioni differenziali lineari contenenti un ritardo, del tipo

$$(1.1) \qquad \frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = L_1 u(t-1), \quad t \geq 0,$$

$$(1.2) \qquad u(t) = \phi(t), \quad -1 \leq t \leq 0,$$

dove M, L, L_1 sono matrici quadrate e $\phi : [-1, 0] \to \mathbb{C}^n$ é una funzione continua. Uno studio dettagliato di (1.2) si trova nel lavoro [C] di S.L. Campbell, dove M puó non essere invertibile. Fra l'altro, l'autore mostra che puó succedere che la coppia (L, M) sia regolare, nel senso che $zM + L$ ha inverso limitato per uno scalare $z \in \mathbb{C}$, e pertanto il problema

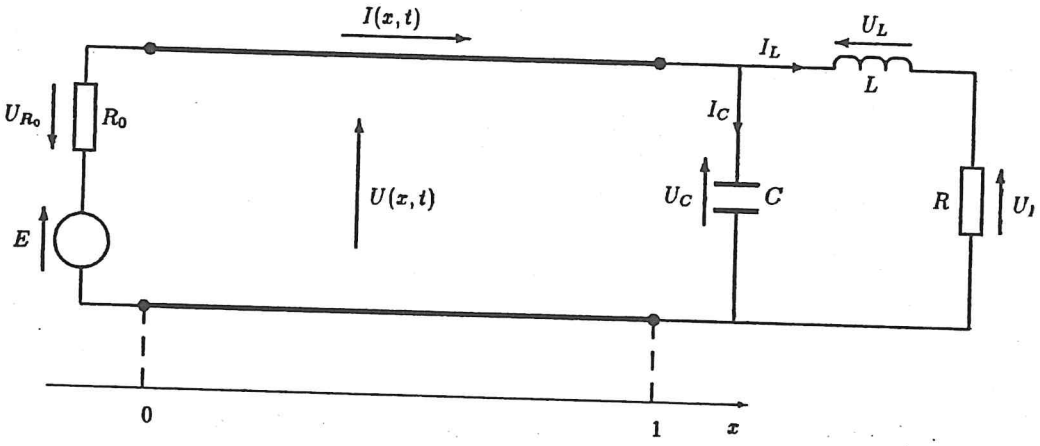
$$\frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$Mu(0) = Mu_0,$$

ha una unica soluzione per ogni vettore iniziale "consistente" u_0, ma che <u>non</u> esista alcuna soluzione continua di (1.1), (1.2). Inoltre, le soluzioni continue di (1.1), (1.2) potrebbero esistere, ma solo su un intervallo finito.
Ebbene, questi fenomeni singolari occorrono quando l'indice μ di ML^{-1}, cioé, il piú piccolo intero non negativo tale che il nucleo $N((ML^{-1})^\nu)$ di $(ML^{-1})^\nu$ e $N((ML^{-1})^{\nu+1})$ coincidono, é maggiore di 1.
Infatti, se $\nu = 1$, proveremo che una relazione di compatibilitá tra $\phi(0)$ e $\phi(-1)$ garantisce la risolubilitá di (1.1), (1.2).
Il problema verrá trattato piú generalmente in uno spazio di Banach complesso X, con norma $\|\cdot\|_X$. Viene assunto che M, L, L_1 sono operatori lineari chiusi da X in sé, con dominio $D(L) \subseteq D(L_1) \cap D(M)$, $0 \in \rho(L)$. Ne segue che $T = ML^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, dove $\mathcal{L}(X)$ denota lo spazio degli operatori lineari limitati da X in X, munito della norma uniforme. L'immagine di T verrá denotata con $R(T)$. Se $Y \subset X$, Y^σ é la chiusura di Y nella topologia di X.
I risultati principali che sono esposti si trovano nel lavoro [FPT] di Favini, Pandolfi e Tanabe.

2. Un esempio dalla fisica

Si consideri il sistema elettrico rappresentato nella figura seguente.



Il sistema é descritto dal sistema di equazioni alle derivate parziali

$$L_0\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}, \quad C_0\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0, \tag{2.1}$$

dove L_0, C_0 sono costanti positive. Le correnti $I_L(t)$, $I_C(t)$ e le tensioni $U_L(t)$, $U_R(t)$, $U_C(t)$ soddisfano le equazioni

$$U_L(t) = L\frac{dI_L}{dt}(t), \quad U_R(t) = RI_L(t), \quad I_C(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt}, \tag{2.2}$$

dove L, R, C sono numeri positivi. In virtú delle equazioni di Kirchoff

$$\begin{aligned} &I(1,t) = I_C(t) + I_L(t), \quad U_L(t) + U_R(t) = U_C(t), \\ &U(1,t) = U_C(t), \quad U(0,t) = E(t) - U_{R_0}(t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

e della legge di Ohm $U_0(t) = R_0 I(0,t)$, si ottengono le seguenti condizioni ai limiti per (2.1) :

$$\begin{aligned} &U(0,t) + R_0 I(0,t) = E(t) \\ &U(1,t) = U_C(t), \quad I(1,t) = C\frac{d}{dt}U_C(t) + I_L(t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove le funzioni $I_L(t)$ e $U_C(t)$ sono legate dalla relazione

$$U_C(t) = L\frac{d}{dt}I_L(t) + RI_L(t). \tag{2.5}$$

Si puó allora ripetere il ragionamento di Hale [H], p.5 e seguenti, per trasformare (2.1), (2.4), (2.5) in un sistema del tipo (1.1), (1.2). I valori delle funzioni $I(x,t)$, $U(x,t)$ in $x=0$ sono espressi mediante i loro valori in $x=1$ e allora la prima condizione ai limiti in (2.4) diventa

$$(2.6)\qquad \begin{aligned}&(R_0+\rho)I(1,t)+(1+R_0\rho^{-1})U(1,t)+(R_0-\rho)I(1,t-\omega)+\\&+(I-R_0\rho^{-1})U(1,t-\omega)=2E(t-\tfrac{\omega}{2}),\end{aligned}$$

dove $\rho=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$, $\omega=2\sqrt{L_0C_0}$. Posto

$$u(t)=\begin{bmatrix} I(1,t)\\ U(1,t)\\ I_L(t)\\ U_C(t)\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix} 2E(t-\frac{\omega}{2})\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&C\\ 0&0&L&0\end{bmatrix},$$

$$L=\begin{bmatrix} R_0+\rho & 1+R_0\rho^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & R & -1\end{bmatrix},\quad L_1=\begin{bmatrix} \rho-R_0 & R_0\rho^{-1}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

allora (2.6), le ultime due relazioni in (2.4) e (2.5) portano ad una equazione del tipo

$$Mu'(t)+Lu(t)=L_1u(t-\omega)+f(t).$$

Per brevitá noi ci limiteremo a trattare il caso $f(t)\equiv 0$. Risultati generali sono contenuti in Favini e Vlasenko [FV].

3. Il caso della singolaritá polare

Assumiamo che $z=0$ é un polo semplice di $(z+T)^{-1}=L(zL+M)^{-1}$. É allora ben noto (cfr. Taylor [T], p. 306) che $R(T)$ é un sottospazio chiuso di X e X é la somma diretta di $N(T)$ e $R(T)$: $X=N(T)\oplus R(T)$. Inoltre, se P denota l'operatore di proiezione su $N(T)$ lungo $R(T)$, allora T commuta con P e la restrizione $\tilde{T}$ di T a $R(T)$ é un isomorfismo da $R(T)$ su se stesso.
Precisiamo anche il significato di soluzione di (1.1), (1.2). Assunto che $\phi\in C([-1,0];D(L))$, cioé ϕ é continua da $[-1,0]$ a $D(L)$, dove $D(L)$ é munito della norma $\|u\|_{D(L)}:=\|Lu\|_X=\|Lu\|$, poniamo

Definizione 1. *Una soluzione stretta di (1.1), (1.2) su* $(0,T)$, $0<T\le\infty$,

con dato iniziale $\phi(\cdot) \in C([-1,0]; D(L))$, *é una funzione* $u \in C([-1,T[; D(L))$ *tale che* $Mu \in C^1([0,T[; X)$ *e (1.1), (1.2) sono soddisfatte, con* $0 \le t \le T$ *al posto di* $t \ge 0$.

Naturalmente, se I é un intervallo di R, X é uno spazio di Banach e k é un intero non negativo, $C^k(I;X)$ denota lo spazio delle funzioni k volte differenziabili con continuitá da I in X, con $C^0(I;X) = C(I;X)$.
Per risolvere (1.1), (1.2) cominciamo con l'osservare che ponendo $Lu = v$ il problema (1.1), (1.2) diventa

$$\frac{d}{dt}(Tv(t)) + v(t) = L_1 L^{-1} v(t-1), \quad t \ge 0, \tag{3.1}$$

$$v(t) = L\phi(t), \quad -1 \le t \le 0. \tag{3.2}$$

Tenendo conto della rappresentazione $X = N(T) \oplus R(T)$, (3.1), (3.2) danno luogo al sistema

$$\frac{d}{dt}(\tilde{T}(1-P)v(t)) + (1-P)v(t) = (1-P)L_1 L^{-1} v(t-1), \quad t \ge 0, \tag{3.3}$$

$$Pv(t) = PL_1 L^{-1} v(t-1), \quad t \ge 0, \tag{3.4}$$

$$(1-P)v(t) = (1-P)L\phi(t), \quad -1 \le t \le 0, \tag{3.5}$$

$$Pv(t) = PL\phi(t), \quad -1 \le t \le 0. \tag{3.6}$$

Si ha

Teorema 1. *Se* $z = 0$ *é un polo semplice di* $(z+T)^{-1}$, *allora per ogni* $\phi \in C([-1,0]; D(L))$ *soddisfacente la relazione di compatibilitá*

$$L\phi(0) - L_1\phi(-1) \in R(T), \tag{3.7}$$

il problema (1.1), (1.2) ha una (necessariamente) unica soluzione stretta.

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che (3.4), (3.6) per $t = 0$ e (3.2) per $t = -1$ forniscono $PL\phi(0) = PL_1\phi(-1)$, che é proprio (3.7).
Sia $0 \le t \le 1$. Allora $Pv(t) = PL_1\phi(t-1)$ e (3.3), insieme a (3.5) in $t = 0$, diventa

$$\frac{d}{dt}((1-P)v(t)) = -\tilde{T}^{-1}(1-P)v(t) + \tilde{T}^{-1}(1-P)L_1\phi(t-1), \quad 0 \le t \le 1,$$

$$(1-P)v(0) = (1-P)L\phi(0).$$

Allora, se $v_0(\cdot)$ denota la soluzione di (3.3)-(3.6) sull'intervallo $[0,1]$, noi abbiamo

$$v_0(t) = PL\phi(t-1) + e^{-t\tilde{T}^{-1}}(1-P)L\phi(0) + \int_0^t e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}(1-P)L_1\phi(s-1)ds,$$

e allora

$$u_0(t) :\equiv L^{-1}v_0(t) = \begin{cases} (1)+(2)+(3), & 0 < t \leq 1, \\ \phi(t), & -1 \leq t \leq 0, \end{cases}$$

con

$$(1) = L^{-1}PL_1\phi(t-1),$$

$$(2) = L^{-1}e^{-t\tilde{T}^{-1}}(1-P)L\phi(0),$$

$$(3) = L^{-1}\int_0^t e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}\tilde{T}^{-1}(1-P)L_1\phi(s-1)ds,$$

soddisfa per $0 < t \leq 1$

$$Mu_0(t) = \tilde{T}e^{-t\tilde{T}^{-1}}(1-P)L\phi(0) + \int_0^t e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}(1-P)L_1\phi(s-1)ds,$$

$$\frac{d}{dt}(Mu_0(t)) = -e^{-t\tilde{T}^{-1}}(1-P)L\phi(0) + (1-P)L_1\phi(t-1)$$

$$-\int_0^t e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}\tilde{T}^{-1}(1-P)L_1\phi(s-1)ds$$

$$= (1-P)L_1\phi(t-1) - Lu_0(t) + PL_1\phi(t-1) = -Lu_0(t) + L_1\phi(t-1)$$

$$= -Lu_0(t) + L_1u_0(t-1), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Si noti che in virtú di (3.7)

$$Lu_0(t) \to PL_1\phi(-1) + (1-P)L\phi(0) = PL\phi(0) + (1-P)L\phi(0) = L\phi(0)$$

per $t \to 0+$, cioé, la funzione u_0 su $[-1,1]$ appartiene a $C([-1,1];D(L))$ e soddisfa (1.1) sull'intervallo $[0,1]$. Ma in generale u_0 <u>non</u> é differenziabile.
Sia $1 \leq t \leq 2$. Poniamo

$$v_1(t) := PL_1L^{-1}v_0(t-1) + e^{-(t-1)\tilde{T}^{-1}}(1-P)v_0(1) +$$

$$+\int_1^t \tilde{T}^{-1}e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}(1-P)L_1L^{-1}v_0(s-1)ds, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Allora da

$$Tv_1(t) = \tilde{T}e^{-(t-1)\tilde{T}^{-1}}(1-P)v_0(1) + \int_1^t e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}(1-P)L_1L^{-1}v_0(s-1)ds$$

segue che per ogni $t \in [1,2]$

$$\frac{d}{dt}(Tv_1(t)) = -e^{-(t-1)\tilde{T}^{-1}}(1-P)v_0(1) + (1-P)L_1L^{-1}v_0(t-1)$$

$$-\int_1^t \tilde{T}^{-1}e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}(1-P)L_1L^{-1}v_0(s-1)ds$$

$$= -v_1(t) + PL_1L^{-1}v_0(t-1) + (1-P)L_1L^{-1}v_0(t-1) = -v_1(t) + L_1L^{-1}v_0(t-1).$$

In particolare,

$$\frac{d}{dt}Tv_1(1) = -v_1(1) + L_1L^{-1}v_0(0) = -v_1(1) + L_1u_0(0)$$

$$= -PL_1L^{-1}v_0(0) - (1-P)v_0(1) + L_1u_0(0) = (\text{definizione di } v_0(\cdot))$$

$$= -PL_1\phi(0) - v_0(1) + PL_1\phi(0) + L_1u_0(0)$$

$$= -v_0(1) + L_1u_0(0) = -Lu_0(1) + L_1\phi(0) = \frac{d}{dt}Mu_0(1)$$

$$= \frac{d}{dt}Tv_0(1).$$

Inoltre,

$$v_1(1) = PL_1L^{-1}v_0(0) + (1-P)v_0(1) = Pv_0(1) + (1-P)v_0(1) = v_0(1),$$

in forza di

$$Pv_0(1) - PL_1L^{-1}v_0(0) = Pv_0(1) - PL_1u_0(0)$$

$$\begin{aligned} &= PL_1\phi(0) - PL_1L^{-1}PL_1\phi(-1) - PL_1L^{-1}(1-P)L\phi(0) = (\text{per } (3.7)) \\ &= PL_1\phi(0) - PL_1L^{-1}PL\phi(0) - PL_1L^{-1}(1-P)L\phi(0) \\ &= PL_1\phi(0) - PL_1\phi(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Cosí la (3.8) implica la condizione di compatibilitá sull'intervallo $[0,1]$:

$$PLu_0(1) = PL_1u_0(0).$$

In generale, sull'intervallo $[n, n+1]$ si definisce $v_n(\cdot)$ per mezzo di

$$v_n(t) := PL_1L^{-1}v_{n-1}(t-1) + e^{-(t-n)\tilde{T}^{-1}}(1-P)v_{n-1}(n)+$$

$$\int_n^t \tilde{T}^{-1}e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}(1-P)L_1L^{-1}v_{n-1}(s-1)ds, \quad n \le t \le n+1, \quad n \ge 2.$$

Si verifica che

$$\frac{d}{dt}(Tv_n(t)) = -v_n(t) + L_1L^{-1}v_{n-1}(t-1), \quad n \le t \le n+1,$$

$$v_n(n) = PL_1L^{-1}v_{n-1}(n-1) + (1-P)v_{n-1}(n) = \text{(per induzione)}$$

$$= Pv_{n-1}(n) + (1-P)v_{n-1}(n) = v_{n-1}(n).$$

Allora la funzione $v(\cdot)$ definita da

$$v(t) = v_n(t), \quad t \in [n, n+1], \quad n = -1, 0, 1, \ldots$$

é la (sola) soluzione stretta di (3.1),(3.2). #

Abbiamo prima osservato che il precedente risultato non garantisce la derivabilitá della soluzione. Basta infatti considerare l'esempio banale

$$\begin{aligned} &u(t) = u(t-1) - v(t-1), \quad t \ge 0, \\ &\dot{v}(t) = \tfrac{dv}{dt}(t) = -v(t) + u(t-1), \quad t \ge 0, \\ &u(t) = \phi_1(t), \quad v(t) = \phi_2(t), \quad -1 \le t \le 0, \end{aligned}$$

dove $\phi_1, \phi_2 \in C([0,1])$. La condizione (3.7) si legge $\phi_1(0) = \phi_1(-1) - \phi_2(-1)$. Ma se $\phi_1(t) = \phi_2(t) = t$, allora la soluzione corrispondente $(u(t), v(t))$ <u>non</u> é differenziabile su $[0, \infty[$, perché $u(t) \equiv 0$, $v(t) = t - 2 + 2e^{-t}$, $0 \le t \le 1$, e $u(t) = 3 - t - 2e^{1-t}$, $v(t) = (\frac{2}{e} - 1)e^{1-t}$, $1 \le t \le 2$, cosicché $u'_-(1) = 0 \ne u'_+(1) = 1$. Il risultato che segue fornisce una condizione sufficiente ad assicurare la derivabilitá su $[0, \infty[$ di $u(t)$ e che u in effetti soddisfa

$$M\frac{du(t)}{dt} + Lu(t) = L_1u(t-1), \quad t \ge 0. \tag{3.9}$$

Teorema 2. *Sotto le ipotesi precedenti su M, L, L_1, se $\phi \in C^1([-1,0]; D(L))$ soddisfa le condizioni di compatibilitá (3.7) e*

$$L\phi'(0) - L_1\phi'(-1) \in R(T), \tag{3.10}$$

$$M\phi'(0) = -L\phi(0) + L_1\phi(-1), \tag{3.11}$$

allora il problema (3.9), (1.2) ha una unica soluzione stretta differenziabile.

Dimostrazione. Sia $v(\cdot)$ la soluzione del problema

$$\frac{d}{dt}(Mv(t)) + Lv(t) = L_1 v(t-1), \quad t \geq 0, \tag{3.12}$$

$$v(t) = \phi'(t), \quad -1 \leq t \leq 0. \tag{3.13}$$

La sua esistenza é garantita dal Teorema 1 e (3.10). Inoltre $v \in C([-1,\infty[; D(L))$ e $Mv \in C^1([0,\infty[; X)$. Poniamo

$$u(t) = \begin{cases} \int_0^t v(s)ds + \phi(0), & t > 0 \\ \phi(t), & -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Integrando ambo i membri di (3.12) si ottiene

$$Mv(t) - Mv(0) = -L\int_0^t v(s)ds + L_1\int_0^t v(s-1)ds, \quad t \geq 0. \tag{3.15}$$

Poiché $\frac{d}{dt}(Mu(t)) = Mv(t) = M\frac{du(t)}{dt}$, $v(0) = \phi'(0)$, dalla (3.15) segue che

$$\frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = L\phi(0) + M\phi'(0) + L_1\int_0^t v(s-1)ds. \tag{3.16}$$

Se $0 \leq t < 1$, allora

$$L_1\int_0^t v(s-1)ds = L_1\int_0^t \phi'(s-1)ds = L_1(\phi(t-1) - \phi(-1))$$
$$= L_1(u(t-1) - \phi(-1)).$$

Pertanto, in forza di (3.11), (3.16), si ottiene (1.1). Analogamente, se $t \geq 1$,

$$L_1\int_0^t v(s-1)ds = L_1\int_0^1 v(s-1)ds + L_1\int_1^t v(s-1)ds$$
$$= L_1\int_0^1 \phi'(s-1)ds + L_1\int_0^{t-1} v(s)ds$$
$$= L_1(\phi(0) - \phi(-1)) + L_1(u(t-1) - \phi(0)) = L_1 u(t-1) - L_1\phi(-1),$$

e quindi ancora vale (1.1). Ció completa la prova. #

Osserviamo che nel precedente controesempio, se $\phi_1(0) = \phi_1(-1) - \phi_2(-1)$ e

$$\phi_1'(0) = \phi_1'(-1) - \phi_2'(-1), \quad \phi_2'(0) = -\phi_2(0) + \phi_1(-1),$$

allora (1.1), (1.2) ammette soluzione differenziabile.

Risultati di esistenza relativi all'equazione non omogenea

$$\frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = L_1 u(t-1) + f(t), \quad t \geq 0,$$

dove $z = 0$ é una singolaritá polare di ordine $m \geq 1$ per il risolvente $(z+T)^{-1}$ sono descritti in Favini e Vlasenko [FV].
Vedi anche il lavoro [A] di P.Alberigo.

4. Il caso degli operatori potenziali astratti

Qui assumeremo che X é una spazio di Banach riflessivo ma indeboliremo l'ipotesi che $z = 0$ sia una singolaritá polare per $(z+T)^{-1}$. Essa viene sostituita dalla seguente : esistono due costanti positive k,δ tali che

$$(4.1) \qquad ||L(zM+L)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leq k$$

per ogni z con $Rez \geq -\delta$.
Equivalentemente, se $T = ML^{-1}$ come sopra,

$$||(zT+1)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leq k, \quad Rez \geq -\delta.$$

É una conseguenza del Teorema ergodico che $X = N(T) \oplus R(T)^a$ e che la restrizione $\tilde{T}$ di T a $R(T)^a$ é un operatore potenziale astratto, i.e., $-\tilde{T}^{-1}$ genera un semigruppo (analitico) nello spazio $R(T)^a$.
Useremo ancora P per denotare l'operatore di proiezione su $N(T)$ lungo $R(T)^a$.
Posto $X_1 = R(T)^a$, $X_2 = D(\tilde{T}^{-1}) = R(T)$, avremo bisogno degli spazi di interpolazione reale $(X_1, X_2)_{\theta,\infty}$, $0 < \theta < 1$; vedi, per esempio, la monografia [L] di A.Lunardi.
É ben noto che $(X, D(\tilde{T}^{-1}))_{\theta,\infty} = (X, R(T))_{\theta,\infty} = (X_1, X_2)_{\theta,\infty}$ ed é provato in Favini e Yagi [FY1] che tale spazio coincide con

$$\{a \in X \,|\, \sup_{t>0} t^\theta ||L(tM+L)^{-1}a||_X < \infty\} = D_{-\tilde{T}^{-1}}(\theta, \infty).$$

Basta infatti osservare che

$$L(tM+L)^{-1}a = (tT+1)^{-1}(Pa+(1-P)a) = Pa+\tilde{T}^{-1}(t+\tilde{T}^{-1})^{-1}(1-P)a$$

implica che se $a \in X$ ha la proprietá $\sup_{t>0} t^\theta ||L(tM+L)^{-1}a||_X < \infty\}$, allora $a \in R(T)^a = X_1$, e quindi $a = (1-P)a$.
Ai valori iniziali $\phi(t)$ richiediamo

(4.2) $\phi \in C^\theta([-1,0]; D(L)), \quad L\phi(0) - L_1\phi(-1) \in X_1\},$

(4.3) $L\phi(0) - L_1\phi(-1) \in D_{-\tilde{T}^{-1}}(\theta, \infty).$

Le assunzioni (4.2), (4.3) sono motivate dal ben noto risultato di regolaritá massimale secondo cui se $-A$ é un operatore settoriale in X, $0 < \theta < 1$, $u_0 \in D(A)$, $f \in C^\theta([0,T]; X)$, lo spazio delle funzioni da $[0,T]$ in X hölderiane di esponente θ, e $f(0) - Au_0 \in D_{-A}(\theta, \infty)$, allora la soluzione integrale u di $u' = -Au + f$, $u(0) = u_0$:

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds$$

in effetti é una soluzione stretta, con la regolaritá $u', Au \in C^\theta([0,T]; X)$, u' essendo fortemente misurabile e limitata da $[0,T]$ a $D_{-A}(\theta, \infty)$. Vedi Lunardi [L], p. 134.
Ció posto, si ha

Teorema 3. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e siano L, L_1, M operatori lineari chiusi da X in sé , tali che $D(L) \subseteq D(M) \cap D(L_1)$, $0 \in \rho(L)$ e valga (4.1).*
Se ϕ soddisfa (4.2), (4.3), allora il problema (1.1), (1.2) ha una unica soluzione stretta u e $\frac{d}{dt}(Mu) \in C^\theta([0,\tau]; X)$ per ogni $\tau > 0$.

Cenno della dimostrazione. Si introducono funzioni $v_n(\cdot)$, $u = -1, 0, 1, \ldots$ per mezzo di

$$v_{-1}(t) = L\phi(t), \quad -1 \le t \le 0$$

$$v_n(t) = PL_1L^{-1}v_{n-1}(t-1) + e^{-(t-n)\tilde{T}^{-1}}(1-P)v_{n-1}(n)$$
$$+ \int_n^t \tilde{T}^{-1}e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}(1-P)L_1L^{-1}v_{n-1}(s-1)ds, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad t \in [u, u+1],$$

come nella prova del <u>Teorema 1</u>, ma qui la situazione é molto piú delicata perché l'operatore $\tilde{T}^{-1}$ <u>non</u> é limitato da $R(T)^a$ in sé.

In virtú delle assunzioni, $v_{-1} \in C^\theta([-1,0]; X)$. Inoltre, se

$$z_0(t) = \tilde{T}e^{-t\tilde{T}^{-1}}(1-P)L\phi(0) + \int_0^t e^{-(t-s)\tilde{T}^{-1}}(1-P)L_1\phi(s-1)ds$$
$$\equiv \tilde{T}(1-P)v_0(t),$$

poiché $L_1\phi \in C^\theta([-1,0];X)$ e

$$\begin{aligned}&-\tilde{T}^{-1}(\tilde{T}(1-P)L\phi(0)) + (1-P)L_1\phi(-1)\\ &= -(1-P)[L\phi(0)-L_1\phi(-1)] = -[L\phi(0)-L_1\phi(-1)] \text{ (per (4.3))} \in D_{-\tilde{T}^{-1}}(\theta,\infty),\end{aligned}$$

il Teorema di regolaritá massimale ci assicura che per $0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}z_0(t) &= -\tilde{T}^{-1}z_0(t) + (1-P)L_1\phi(t-1)\\ &= -\tilde{T}^{-1}z_0(t) + (1-P)L_1L^{-1}v_{-1}(t-1)\\ &= -(1-P)v_0(t) + (1-P)L_1L^{-1}v_{-1}(t-1),\end{aligned}$$

e $z_0'(\cdot)$, $\tilde{T}^{-1}z_0(\cdot) = (1-P)v_0(\cdot) \in C^\theta([0,1];X)$. D'altro canto,

$$\begin{aligned}&Tv_0(t) = z_0(t), \quad 0 \le t \le 1,\\ &Pv_0(t) = PL_1\phi(t-1) = PL_1L^{-1}v_{-1}(t-1), \quad 0 \le t \le 1,\\ &v_0(0) = PL_1\phi(-1) + (1-P)L\phi(0) = PL\phi(0) + (1-P)L\phi(0) = L\phi(0).\end{aligned}$$

Perció, $v_0(\cdot)$ soddisfa

$$\frac{d}{dt}(Tv_0(t)) + v_0(t) = L_1L^{-1}v_{-1}(t-1), \quad 0 \le t \le 1,$$

e $v_0(0) = L\phi(0) = v_{-1}(0)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}\frac{dz_0}{dt}(1) &= -\tilde{T}^{-1}z_0(1) + (1-P)L_1\phi(0)\\ &= -(1-P)v_0(1) + (1-P)L_1\phi(0) = (1-P)[L_1\phi(0) - v_0(1)]\\ &\quad \in D_{-\tilde{T}^{-1}}(\theta,\infty)\end{aligned}$$

implica che se $u_0(t) = L^{-1}v_0(t)$, da $Pv_0(1) = PL_1L^{-1}v_{-1}(0) = PL_1\phi(0)$, allora

$$\begin{aligned}Lu_0(1) - L_1u_0(0) &= Lu_0(1) - L_1\phi(0)\\ &= (1-P)v_0(1) + Pv_0(1) - (1-P)L_1\phi(0) - PL\phi(0)\\ &= -(1-P)[L_1\phi(0) - v_0(1)] + P[v_0(1) - L_1\phi(0)]\\ &= -(1-P)[L_1\phi(0) - v_0(1)] \in D_{-\tilde{T}^{-1}}(\theta,\infty).\end{aligned}$$

Pertanto ci troviamo nella stessa situazione sull'intervallo $[1,2]$. Poiché la procedura di ottenere v_n da v_{n-1} é sempre la stessa, si ottiene quanto affermato.
#

5. Applicazioni

Applicazione 1. In numerosi esempi di equazioni alle derivate parziali gli operatori L e M commutano, nel senso che $L^{-1}(M+\lambda_0)^{-1} = (M+\lambda_0)^{-1}L^{-1}$, per un $\lambda_0 \in \rho(-M)$ $\lambda = 0$ é un polo semplice del risolvente $(z-M)^{-1}$ e $D(L) = D(M)$. Allora é facile vedere che $T = ML^{-1}$ ha le proprietá $N(T) = N(M)$, $R(T) = R(M)$ e $X = N(M) \oplus R(M) = N(T) \oplus R(T)$. Come esempio in dimensione spaziale uguale a 1, si puó prendere

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+1)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + a_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t-1,x), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

con condizioni ai limiti

$$u(t,0) = u(t,\pi) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\pi) = 0$$

e condizione iniziale

$$u(t,x) = \phi(t,x), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

dove $a_0(\cdot) \in C([0,\pi])$, $\phi \in C([-1,0]); C^2([0,\pi])$ e

$$\phi(t,0) = \phi(t,\pi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,0) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,\pi) = 0, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Si prenda $X = \{f \in C([0,\pi]); f(0) = f(\pi) = 0\}$ con la norma del massimo e si definiscano L, L_1, M mediante

$$\begin{aligned}
&D(L) = \{u \in C^2([0,\pi]); u(0) = u(\pi) = u''(0) = u''(\pi) = 0\},\\
&Lu = -u'', \quad u \in D(L),\\
&D(L_1) = D(L), \quad L_1 u = a_0 u'', u \in D(L_1),\\
&D(M) = D(L), \quad Mu = (-L+1)u, \quad \forall u \in D(M).
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che 0 é un polo semplice di $(z-M)^{-1}$, L e M commutano e P é dato da

$$Pf(x) := \frac{2}{\pi}\sin x \int_0^\pi f(y)\sin y\, dy, \quad f \in X.$$

Per applicare il Teorema 2 basterá assumere che la funzione $\phi(t)$ data da $\phi(t)(x) := \phi(t,x)$ abbia la regolaritá $\phi \in C^1([-1,0]; D(L))$ e

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t}(0,x) + a_0(x)\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t}(-1,x) = u_0''(x) + u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad u_0 \in D(L),$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t}(0,x) + a_0(x)\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t}(-1,x) = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t}(0,x) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(0,x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(0,x) + a_0(x)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(-1,x) = u_1''(x) + u_1(x), \quad 0 \le x \le \pi, \quad u_1 \in D(L).$$

Applicazione 2. Sia Ω un aperto limitato di R^n con frontiera $\partial\Omega$ regolare e sia $m(\cdot) \ge 0$, $m(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$. Allora l'operatore M di moltiplicazione per $m(x)$ é limitato da $H_0^1(\Omega)$ a $H^{-1}(\Omega)$. Sia $L = -\Delta$ con condizioni ai limiti Dirichlet in $H^{-1}(\Omega)$, cosicché $D(L) = H_0^1(\Omega)$.
Si vede in Favini e Yagi [FY1, FY2] che la condizione (4.1) é soddisfatta in $X = H^{-1}(\Omega)$. Allora il Teorema 3 si applica a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(m(x)u(t,x)) = \Delta u(t,x) + \Delta u(t-1,x), \quad t \ge 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \ge 0,$$

$$u(t,x) = \phi(t,x), \quad -1 \le t \le 0, \quad x \in \Omega,$$

con $\phi \in C^\theta([-1,0]; H_0^1(\Omega))$, $\Delta\phi(0,x) + \Delta\phi(-1,x) = m(x)v(x)$, dove $v(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$.

Applicazione 3. Siano V, W, H spazi di Hilbert, con $V \hookrightarrow W \hookrightarrow H$, le immersioni essendo dense e continue. Siano $a(\cdot,\cdot)$ e $b(\cdot,\cdot)$ forme sesquilineari simmetriche continue e positive su $V \times V$ e $W \times W$, rispettivamente. Siano A e B gli operatori associati ad esse, precisamente

$$D(A) := \{u \in V; v \to a(u,v) \text{ é continua nella norma di } H \text{ su } V\},$$
$$(Au,v)_H = a(u,v), \quad u \in D(A), \quad v \in V,$$

$$D(B) := \{u \in W; v \to b(u,v) \text{ é continua nella norma di } H \text{ su } W\},$$
$$(Bu,v)_H = b(u,v), \quad u \in D(B), \quad v \in W,$$

Gli operatori A e B sono definiti positivi e autoaggiunti in H. Supponiamo $D(A) \subseteq D(B)$ e che BA^{-1} sia completamente continuo in H. Sia poi $\lambda \ne 0$ un elemento di $\sigma(BA^{-1})$. Se A_1 é un operatore lineare chiuso tale che $D(A_1) \supseteq D(A)$, si vede che le ipotesi nei risultati precedenti sono soddisfatte dagli operatori $M = B - \lambda A$, $L = A$ e $L_1 = A_1$.

Bibliografia

[A] P. Alberigo, *Singular delay equations with stabilizable operators*, Comm. Applied Analysis 3(1999), 253-266.

[C] S.L. Campbell , *Singular linear systems of differentiable equations with delays*, Applicable Analysis 11(1980), 129-136.

[FPT] A. Favini, L. Pandolfi, H. Tanabe , *Singular equations with delays*, Diff. Int. Eqs. 12(1999), 351-371.

[FV] A. Favini, L. Vlasenko, *On solvability of a degenerate non-stationary differential difference equation in Banach spaces*, Preprint.

[FY1] A. Favini, A. Yagi, *"Degenerate Differential Equations in Banach Spaces"* , M. Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 1999.

[FY2] A. Favini, A. Yagi, *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 163(1993), 353-384.

[H] J. Hale, *"Theory of Functional Differential Equations"* , Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[L] A. Lunardi, *"Analytic semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems"* , Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1995.

[T] A. E. Taylor, *"Introduction to Functional Analysis"* , J. Wiley & Sons, New York, 1958.